Mic$\hbar$ael Flohr
Andre Fischer
16. Oktober 2007

Die folgenden Übungen haben vorbereitenden Charakter und sollen helfen, den mathematischen Formalismus der Quantenmechanik besser bewältigen zu können. Wenn Ihnen diese Übungen sehr große Schwierigkeiten bereiten, wiederholen Sie bitte das entsprechende Material aus Ihren einführenden Mathematikvorlesungen (Analysis, Lineare Algebra).

1. *Eigenwerte und Eigenzustände*: Betrachten Sie die folgenden 2×2 Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrizen. Wir wollen außerdem noch $\sigma_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ definieren.

2. *Hermitesche Matrizen*: Betrachten Sie die Menge aller hermiteschen 2×2 Matrizen. Prüfen Sie, ob diese Menge unter der Operation der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe formt. Zeigen Sie, dass diese Menge von Matrizen unter der Operation der Addition von Matrizen eine Gruppe formt. Betrachten Sie eine hermitesche 2×2 Matrix A und zeigen Sie, wie diese als Linearkombination aus den σ_k, $k = 0, 1, 2, 3$ aus Aufgabe (1.) geschrieben werden kann.

3. *Unitäre Matrizen*: Betrachten Sie die Menge aller unitären 2×2 Matrizen. Zeigen Sie, dass diese Menge unter der Operation der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe formt. Berechnen Sie mit den σ_k, $k = 0, 1, 2, 3$ aus Aufgage (1.) die Matrizen

$$J_k = \exp(\mathrm{i}\alpha\sigma_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{i}\alpha\sigma_k)^n$$

   und prüfen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ diese Matrizen J_k unitär sind. Finden Sie die Eigenwerte der Matrizen J_k auf möglichst einfache Weise indem Sie Ihre Kenntnis der Eigenwerte der σ_k nutzen.

4. [*Die Lie-Algebra* $\mathfrak{su}(2)$: Falls Sie unermüdlich sind, können Sie nun noch die Lie-Algebra der Matrizen σ_k, $k = 1, 2, 3$ aus Aufgabe (1.) bestimmen, d.h. die Kommutatoren

$$[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j$$

   berechnen. Vergleichen Sie dies mit der Lie-Algebra infinitesimaler Drehungen im $\mathbb{R}^3$.]

Die Matrizen σ_k, $k = 1, 2, 3$ werden übrigens die Pauli-Matrizen genannt. Sie spielen bei der Beschreibung des (halbzahligen) Spins von Elektronen (und anderen Elementarteilchen) eine herausragend wichtige Rolle.